

Chương I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Mục tiêu

Sau khi nghiên cứu chương này, học sinh có thể:

- Biết được các khái niệm về đạo hàm cấp hai, tính đơn điệu của hàm số, cực trị của hàm số, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, tiệm cận, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
- Giải được các bài tập về đạo hàm cấp hai, tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất, tiệm cận, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
- Xác định được đạo hàm cấp hai, các khoảng đơn điệu, tìm các điểm cực trị, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn xác định
- Xác định được các đường tiệm cận, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số
- Say mê và yêu thích tìm hiểu các bài toán về hàm số, ứng dụng đạo hàm.

☞ **Nhắc lại:** Các công thức đạo hàm cơ bản:

$$\begin{array}{ll}
 1. (u \pm v)' = u' \pm v'; & 4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}; \\
 2. (ku)' = k.u'; & 5. \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \text{ (với } v = v(x) \neq 0) \\
 3. (u.v)' = u'v + v'u; & 6. y'_x = y'_u \cdot u'_x
 \end{array}$$

Bảng đạo hàm

Đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của các hàm số hợp $u = u(x)$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

§1. ĐẠO HÀM CẤP HAI

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$. Khi đó, hệ thức $y' = f'(x)$ là một hàm số mới trên khoảng $(a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là **đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x** và kí hiệu là: y'' hoặc $f''(x)$.

☞ **Chú ý:** - Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu là y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$;

- Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$, kí hiệu là $f^{(n-1)}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 4$).

Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là **đạo hàm cấp n của $f(x)$** . Kí hiệu là: $y^{(n)}(x)$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^5$. Tính y'' .

Giải

Ta có: $y' = 5x^4$; $y'' = 20x^3$.

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $s = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số $s = f(t)$ tại t

$$a(t) = f''(t).$$

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2}{4-x}$; b) $y = \sin 2x$; c) $y = \cos^2 x$; d) $y = x(x^2 + 2x - 3)$;

e) $y = (x+5)^{10}$; f) $y = x \cos 2x$; g) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; h) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

Bài 2. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{x^2-1}$; b) $y = \frac{x+1}{x-2}$; c) $y = x\sqrt{1+x^2}$; d) $y = x^2 \sin x$

e) $y = (1-x^2) \cos x$; f) $y = \sqrt{x}$; g) $y = \frac{x^2}{1-x}$; h) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$.

§2. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu của hàm số

1.1. Nhắc lại định nghĩa

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn (nửa khoảng). Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K . Ta nói:

❖ Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

❖ Hàm số $y = f(x)$ **ngược biến** (giảm) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

Hàm số đồng biến hoặc ngược biến trên K được gọi chung là hàm số **đơn điệu** trên K .

1.2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Ta thừa nhận định lý sau đây

Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ ngược biến trên K .

2. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

2.1. Quy tắc

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$;
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định;
3. Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên;
4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, ngược biến của hàm số.

2.2. Áp dụng

Ví dụ 1: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$

Giải

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- $y' = 3x^2 - 3$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						



Hàm số ngược biến trên khoảng $(-1; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

BÀI TẬP

Bài 1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

c) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$

Bài 2. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

a) $y = \frac{3x+1}{1-x}$;

b) $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$;

c) $y = \frac{x+1}{2x-5}$;

d) $y = \frac{x^2 - 2x}{1-x}$;

e) $y = \frac{2x}{x^2 - 9}$.

Bài 3. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

☞ **Gợi ý:** Sử dụng định lí sau:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

+) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$;

+) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$;

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm cực đại, cực tiểu

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số xác định $y=f(x)$ và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$ và điểm $x_0 \in (a;b)$).

a) Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0-h; x_0+h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

b) Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0-h; x_0+h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

☞ **Chú ý:** - Điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**;
- Giá trị cực đại và cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

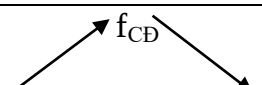
2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

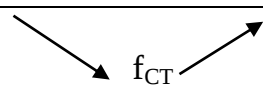
Ta thừa nhận định lý sau đây

Định lý 1. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $K=(x_0-h; x_0+h)$ và có đạo hàm trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$ với $h>0$.

a) Nếu $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0-h; x_0)$ và $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0; x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0-h; x_0)$ và $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0; x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

X	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

x	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

3. Quy tắc tìm cực trị

☞ Quy tắc 1

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$;
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định;
3. Lập bảng biến thiên;
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của các hàm số $y=x^3-3x+1$

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			3		-1	

$-\infty \nearrow \searrow \nearrow +\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $x = -1$ là điểm cực đại, $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

Định lí 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

a) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu;

b) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Áp dụng định lí 2, ta có quy tắc sau đây để tìm các điểm cực trị của một hàm số.

Quy tắc 2

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$;
2. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) là các nghiệm của nó;
3. Tính $f'(x)$ và $f''(x_i)$;
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

Giải

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1; x = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4; f''(\pm 1) = 8 > 0 \Rightarrow x = -1 \text{ và } x = 1 \text{ là hai điểm cực tiểu}$$

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ là điểm cực đại.}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Áp dụng quy tắc 1, tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$;

b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$;

c) $y = x + \frac{1}{x}$;

d) $y = x^3(1-x)^2$;

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$;

Bài 2. Áp dụng quy tắc 2, tìm điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$;

b) $y = \sin 2x - x$;

c) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$;

d) $y = \sin x + \cos x$

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số

$$y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$$

luôn luôn có một điểm cực đại và điểm cực tiểu.

Bài 4. Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

đều là những số dương và $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại.

Bài 5. Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

§4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

a) Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max_D f(x)$;

b) Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu: $m = \min_D f(x)$.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 2x - 4$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		$-$ 0 $+$	
y		$\searrow$ -1 $\nearrow$	

Vậy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -1$.

2. Cách tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

2.1. Định lý

Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó

2.2. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

Quy tắc

a) Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định;

b) Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$;

c) Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có

$$M = \max_{[a;b]} f(x) ; \quad m = \min_{[a;b]} f(x).$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(0) = 4$$

$$f(1) = 2$$

$$f(-1) = 2$$

$$\max f(x) = 4 \text{ trên đoạn } [-1;1]; \quad \min f(x) = 2 \text{ trên đoạn } [-1;1].$$

BÀI TẬP

Bài 1. Lập bảng biến thiên và tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:

a) $y = x^2$ trên $[-3;0]$

b) $y = \frac{x+1}{x-1}$ trên $[3;5]$

c) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ trên $[-1;1]$

d) $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ trên $[1;3]$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên $[-4;4]$

b) $f(x) = \sqrt{5-4x}$ trên $[-1;1]$

c) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ trên $[-1;3]$.

Bài 3. Tính giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a) $y = \frac{4}{1+x^2}$

b) $y = 4x^3 - 3x^4$

§5. TIỆM CẬN

1. Đường tiệm cận ngang

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (khoảng dạng $(a; +\infty); (-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$).

Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

Ví dụ 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-5}$

Giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\left(1 - \frac{5}{x} \right)} = 2;$$

$$\text{Hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\left(1 - \frac{5}{x} \right)} = 2$$

Vậy $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

2. Đường tiệm cận đứng

Định nghĩa: Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Ví dụ 2: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-5}$

Giải

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x+3}{x-5} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x+3}{x-5} = -\infty$$

Vậy $x = 5$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

☞ **Chú ý :** Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(a + \frac{b}{x} \right)}{x \left(c + \frac{d}{x} \right)} = \frac{a}{c} \Rightarrow \text{Tiệm cận ngang: } y = \frac{a}{c}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^+} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^-} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty \Rightarrow \text{Tiệm cận đứng: } x = -\frac{d}{c}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số:

a) $y = \frac{-x+7}{x+1}$

b) $y = \frac{2x-5}{5x-2}$

c) $y = \frac{2-x}{9-x^2}$

Bài 2. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số:

a) $y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$

b) $y = \frac{2-x}{9-x^2}$

c) $y = \frac{3x+4}{x-1}$

d) $y = \frac{2x^2+7x+4}{x+3}$

§6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

1.1. Tập xác định

Tìm tập xác định của hàm số

1.2. Sự biến thiên

- Xét chiều biến thiên của hàm số:

+ Tính đạo hàm y' ;

+ Tìm các điểm tại đó đạo hàm $y' = 0$ hoặc không xác định;

+ Xét dấu đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

- Tìm cực trị.

- Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).

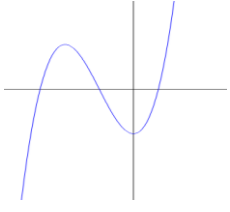
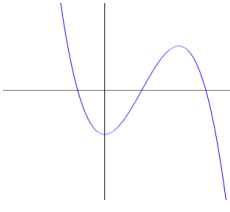
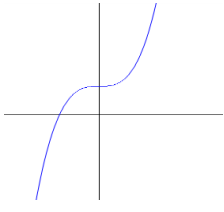
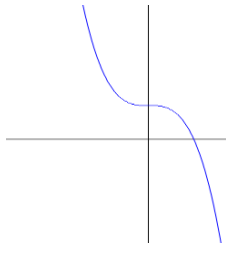
- Lập bảng biến thiên (Ghi các kết quả tìm được vào bảng biến thiên).

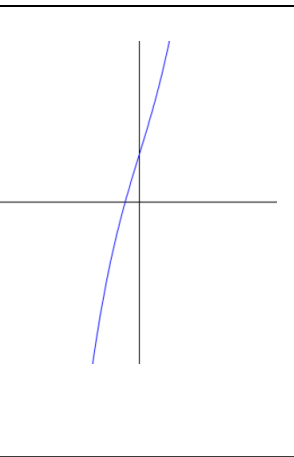
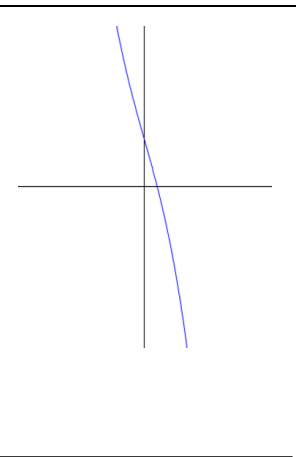
1.3. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

2. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức

2.1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y'' = 0$ có nghiệm kép		

Phương trình $y'' = 0$ vô nghiệm		
-------------------------------------	---	--

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$				
y'		+	0	-	0	+		
y		$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$

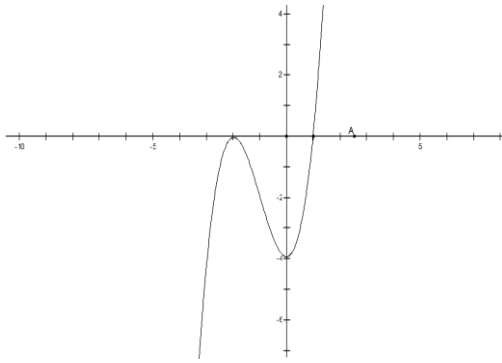
Hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$; $y_{CD} = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$; $y_{CT} = -4$

Bảng giá trị:

x	-3	-1	1
y	-4	-2	0



Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 + 6x - 4$$

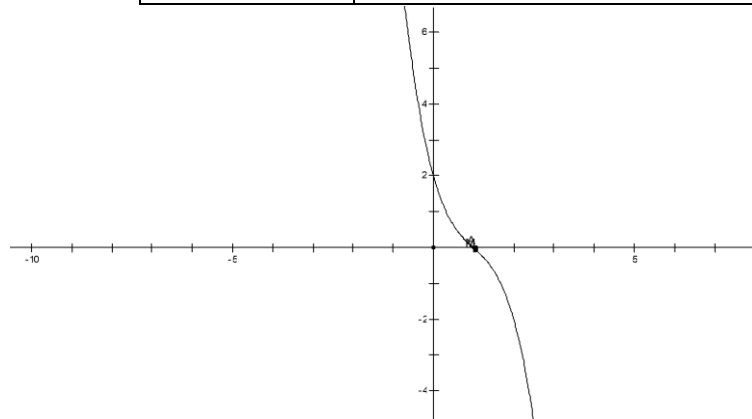
$$y' < 0, \forall x \in D$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$$

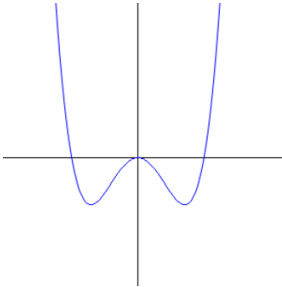
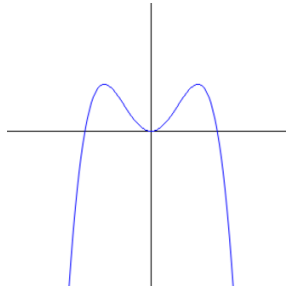
Bảng biến thiên

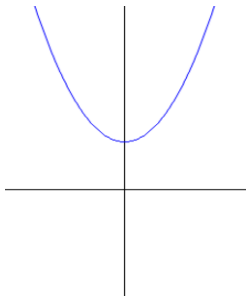
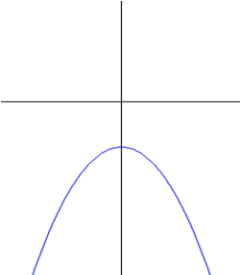
Điểm đặc biệt: (1; 0);
(0; 2)

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	-	
y	$+\infty$	$-\infty$



2.2. Hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y'' = 0$ có ba nghiệm phân biệt		

Phương trình $y'' = 0$ có một nghiệm		
---	---	--

Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$

Giải

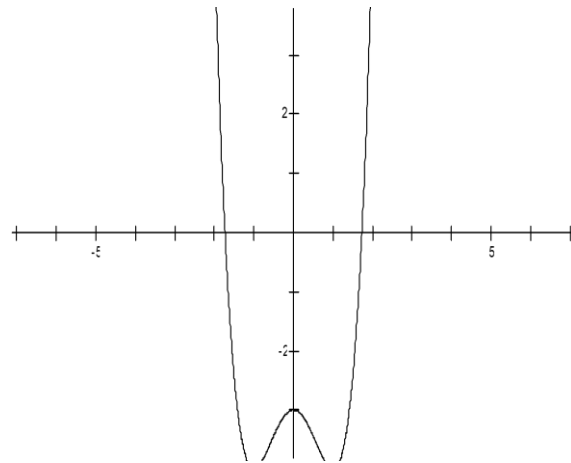
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = -4 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty$$

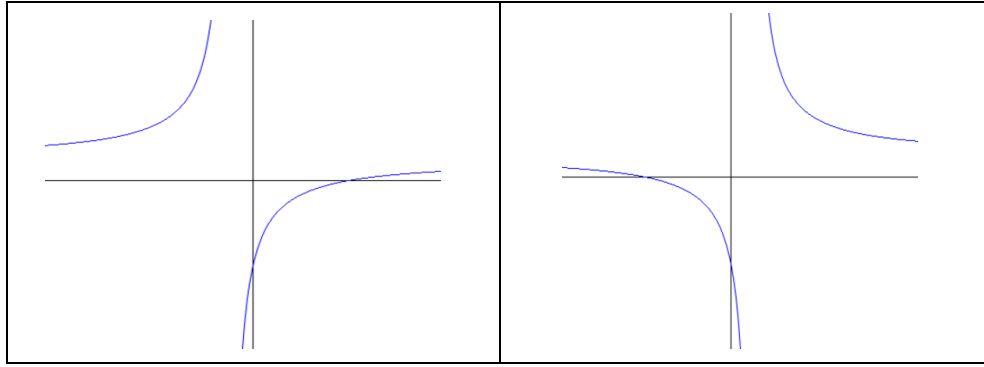
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty$$



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		-	0	+	0	+			
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

2.3. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
-------------------	-------------------



Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Sự biến thiên:

$$y' = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$$

$\Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty, 1); (1, +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1} = -\infty$$

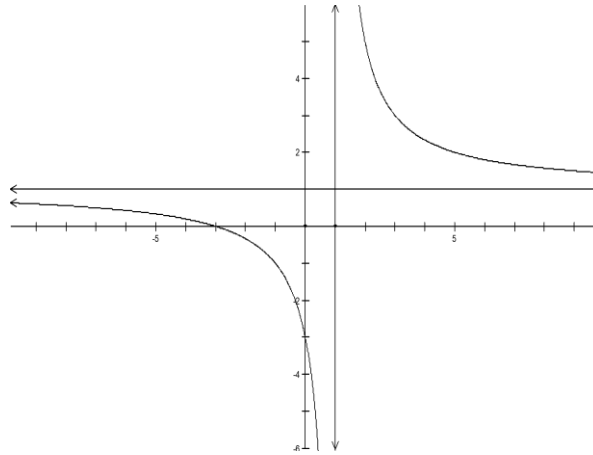
Suy ra $x=1$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$$

Suy ra $y=1$ là tiệm cận ngang.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

Đồ thị:



Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1-2x}{2x-4}$

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Sự biến thiên: $y' = \frac{6}{(2x-4)^2} > 0, \forall x \neq 2$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty, 2); (2, +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-2x}{2x-4} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-2x}{2x-4} = -\infty$$

Suy ra $x=2$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -1 \Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	-1 $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ -1

Đồ thị

$f(x)=(1-2x)(2x-4)$
$f(x)=1$

3. Sự tương giao của các đồ thị

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2) .

Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) , ta phải giải phương trình

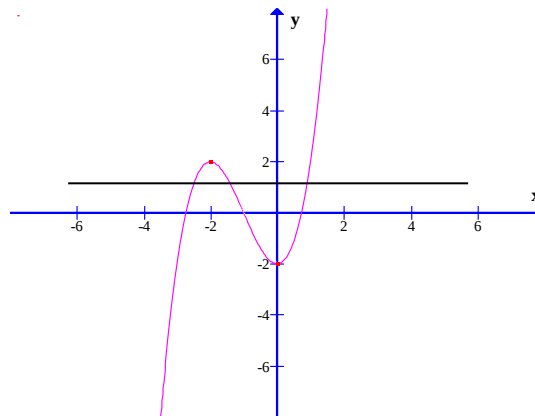
$$f(x) = g(x).$$

Giả sử phương trình trên có các nghiệm là $x_0, x_1, x_2, \dots$. Khi đó, các giao điểm của (C_1) và (C_2) là $M_0(x_0, f(x_0)), M_1(x_1, f(x_1)), \dots$

Ví dụ 3:

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$

Giải



b) Sử dụng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 + 3x^2 - 2 = m$

Giải

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng

$$y = m.$$

- $m > 2$: phương trình có một nghiệm
- $m = 2$: phương trình có hai nghiệm
- $-2 < m < 2$: phương trình có ba nghiệm
- $m = -2$: phương trình có hai nghiệm
- $m < -2$: phương trình có một nghiệm

BÀI TẬP

Bài 1. Khảo sát đồ thị hàm số bậc ba sau:

a) $y = 2 + 3x - x^3$ b) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$ d) $y = 2x^3 + 5$

Bài 2. Khảo sát đồ thị hàm số bậc bốn sau:

a) $y = -x^4 + 8x^2 - 1$ b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

c) $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2}$ d) $y = 2x^2 - x^4$

Bài 3. Khảo sát đồ thị hàm phân thức sau:

a) $y = \frac{x+3}{x-1}$ b) $y = \frac{1-2x}{2x-4}$ c) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$

Bài 4. Khảo sát đồ thị hàm số. Từ đó tìm số nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ b) $-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

c) $2x^2 - x^4 = -1$

Bài 5. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$;

b) Dựa vào đồ thị hàm số, biện luận về số nghiệm của phương trình sau theo tham số m : $x^3 - 3x + m = 0$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

★ ★ ★ ★

Bài 1. Tìm khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 2x^2 - x - 7$

b) $y = \frac{x-5}{1-x}$

Bài 2. Tìm cực đại, cực tiểu của hàm số sau:

$$y = x^4 - 2x^2 + 2$$

Bài 3. Tìm tiệm đứng và tiệm cận ngang của hàm số sau:

$$y = \frac{2x+3}{2-x}$$

Bài 4. Khảo sát các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2;$

b) $y = x^3 + 3x^2 + 1$

Dựa vào đồ thị hàm số, biện luận số nghiệm của phương trình sau:

$$x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}$$

Chương II. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Mục tiêu

- Sau khi nghiên cứu chương này, học sinh có thể:
- Biết được các khái niệm lũy thừa, lôgarit, hàm số lũy thừa, lũy thừa.
 - Giải được các bài tập về lũy thừa, lôgarit, lũy thừa.
 - Tính được đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit, tính được giá trị của hàm mũ, lôgarit.
 - Say mê và yêu thích tìm hiểu các bài toán về hàm số mũ, hàm số lôgarit.

§1. LŨY THỪA

1. Khái niệm lũy thừa

1.1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số } a}$$

Trong biểu thức a^n , ta gọi a là **cơ số**, n là **số mũ**.

Với $a \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \diamond a^0 &= 1 \\ \diamond a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}$$

☞ **Chú ý:** 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

Ví dụ 1: Tính giá trị biểu thức

$$A = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-5} \cdot 8^{-3} \right] : (-2)^{-5}$$

Giải

$$\begin{aligned}
 A &= \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-5} \cdot 8^{-3} \right] : (-2)^{-5} \\
 &= (2^{-1})^{-5} \cdot (2^3)^{-3} : (-1 \cdot 2)^{-5} \\
 &= 2^5 \cdot 2^{-9} : -(2^{-5}) \\
 &= 2^{-4} : -(2^{-5}) = -2^{-4-(-5)} = -2
 \end{aligned}$$

2. Phương trình $x^n = b$

a) *Trường hợp n lẻ :*

Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất.

b) *Trường hợp n chẵn:*

- Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm;
- Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$;
- Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau.

3. Căn bậc n

3.1. Khái niệm: Cho số thực b và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số a được gọi là **căn bậc n** của b nếu $a^n = b$.

❖ Với n lẻ và $b \in \mathbb{R}$: có duy nhất một căn bậc n của b, kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$

❖ Với n chẵn và

- $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n
- $b = 0$: Có một căn bậc n của b là số 0
- $b > 0$: Có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$,

3.2. Tính chất căn bậc n còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$;
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$;
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;
- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi n lẻ} \\ |a|, & \text{khi n chẵn;} \end{cases}$
- $\sqrt[n]{k \sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức

$$a) \sqrt[5]{9 \cdot \sqrt{-27}}$$

$$b) \sqrt[3]{5\sqrt{5}}$$

Giải

$$a) \sqrt[5]{9 \cdot \sqrt{-27}} = \sqrt[5]{3^2(-3^3)} = \sqrt[5]{-3^5} = -3$$

$$b) \sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^3} = \sqrt{5}$$

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$ trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Lũy thừa của a với số mũ r là a^r xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ví dụ 3: Tính a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ b) $(27)^{-\frac{2}{3}}$

Giải

$$a) \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2}$$

$$b) (27)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

5. Tính chất của lũy thừa với số mũ thực

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực tùy ý. Ta có:

- $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta};$
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta};$
- $(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha;$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha};$
- $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}.$

❖ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

❖ Nếu $a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

BÀI TẬP

Bài 1. Tính:

a) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$

b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}}$

c) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{\frac{-2}{3}}$

d) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$

Bài 2. Tính:

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$;

b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$;

c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$;

d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$;

Bài 3. Viết các số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $1^{3,75}; 2^{-1}; \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$;

b) $98^0; \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}; 32^{\frac{1}{5}}$.

Bài 4. Rút gọn biểu thức:

a) $\frac{a^{\frac{4}{3}}(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})}$

b) $\frac{b^{\frac{1}{5}}(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}})}$; $b \neq 1$

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Khái niệm

Hàm số $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là **hàm số lũy thừa**.

Ví dụ 1: $y = x^2, y = x^{\frac{1}{3}}, y = x^{\sqrt{3}}, y = x^{-3}$ là những hàm số lũy thừa

- **Chú ý:** Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α . Cụ thể:
 - ❖ Với α nguyên dương: $D = \mathbb{R}$
 - ❖ Với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 - ❖ Với α không nguyên: $D = (0; +\infty)$

2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Ví dụ 2:

$$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3} x^{\left(\frac{4}{3}-1\right)} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(x^{\sqrt{5}}\right)' = \sqrt{5}x, \quad (x > 0)$$

▪ **Chú ý:**
$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

Ví dụ 3:
$$\begin{aligned} \left[(3x^2 - 5x + 1)^{\frac{3}{4}}\right]' &= \frac{3}{4} (3x^2 - 5x + 1)^{-\frac{1}{4}} (3x^2 - 5x + 1)' \\ &= \frac{3}{4} (3x^2 - 5x + 1)^{-\frac{1}{4}} (6x - 5) \end{aligned}$$

3. Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$

$y = x^\alpha, \alpha > 0$	$y = x^\alpha, \alpha < 0$
1. Tập khảo sát: $(0; +\infty)$	1. Tập khảo sát: $(0; +\infty)$
2. Sự biến thiên	2. Sự biến thiên
$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0$	$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0$

Giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$

Tiệm cận: Không có

Giới hạn đặc biệt

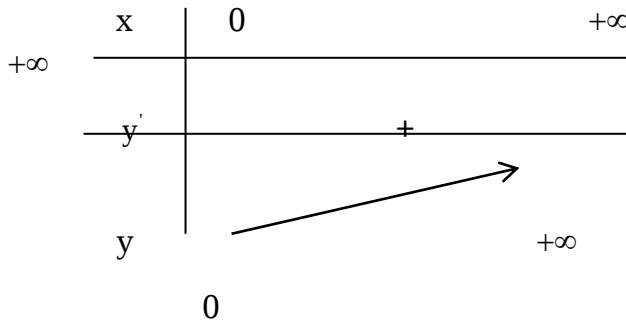
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$$

Tiệm cận:

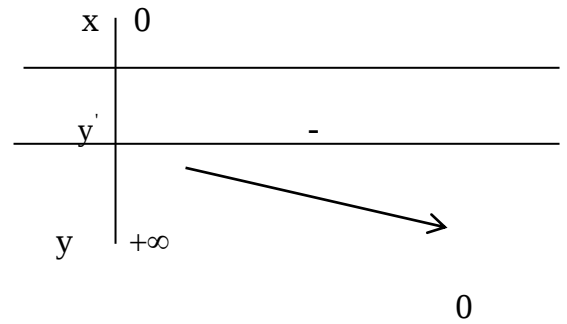
Trục Ox là tiệm cận ngang

Trục Oy là tiệm cận đứng của đồ thị

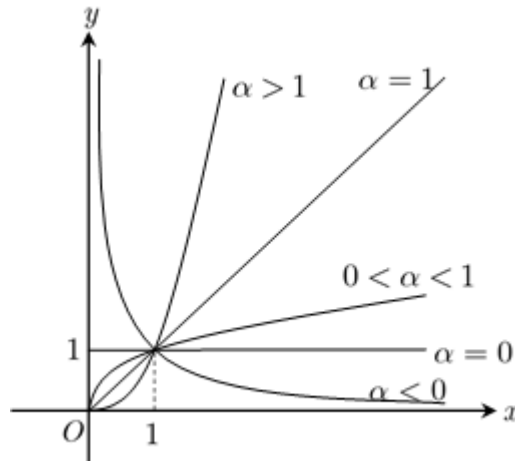
3. Bảng biến thiên



4. Đồ thị (Hình vẽ với $\alpha > 0$)



4. Đồ thị (Hình vẽ với $\alpha < 0$)



- **Chú ý:** Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

Ví dụ 4: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^{\frac{-2}{3}}$

Giải

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

Sự biến thiên: $y' = \frac{-2}{3} x^{\frac{-5}{3}} = \frac{-2}{3x^{\frac{5}{3}}} < 0$

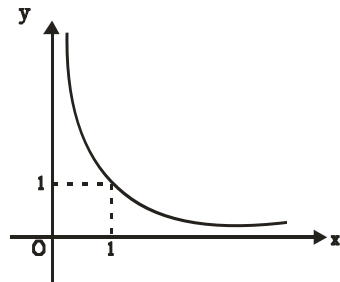
$\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên D

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$
- Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		-
y	$+\infty$	$\searrow 0$

Đồ thị:



BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = (1-x)^{\frac{-1}{3}}$

b) $y = (2-x^2)^{\frac{3}{5}}$

c) $y = (x^2 - 1)^{-2}$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$

b) $y = (x^2 - x - 2)^{\sqrt{2}}$

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

a) $y = x^{\frac{4}{3}}$;

b) $y = x^{\frac{5}{3}}$.

§3. LÔGARIT

1. Khái niệm lôgarit

1.1. Định nghĩa: Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **lôgarit cơ số a của b** và kí hiệu: $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$$

Ví dụ 1: a) $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2 \text{ vì } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$$

1.2. Tính chất: Cho hai số dương a và b , $a \neq 1$. Ta có tính chất sau:

$$\begin{aligned} \diamond \log_a 1 &= 0; \log_a a = 1 \\ \diamond a^{\log_a b} &= b, \log_a a^\alpha = \alpha \end{aligned}$$

Ví dụ 2: a) $A = \log_2 \sqrt[5]{8} = \log_2 8^{\frac{1}{5}}$

$$= \log_2 (2^3)^{\frac{1}{5}} = \log_2 2^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 9^{2\log_3 4 + 4\log_{81} 2} = 9^{2\log_3 4} \cdot 9^{4\log_{81} 2} \\ &= (3^2)^{2\log_3 4} \cdot (9^2)^{2\log_{81} 2} = 3^{4\log_3 4} \cdot 81^{2\log_{81} 2} \\ &= (3^{\log_3 4})^4 \cdot (81^{\log_{81} 2})^2 = 4^4 \cdot 2^2 = 1024 \end{aligned}$$

2. Quy tắc tính lôgarit

2.1. Lôgarit của một tích

Định lí 1

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

☞ *Lôgarit của một tích bằng tổng các lôgarit.*

Ví dụ 3: a) Tính: $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 9 \cdot 4 = \log_6 36 = 2$

b) Tính: $\log_{\frac{1}{2}} 2 + 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8}$

2.2. Lôgarit của một thương

Định lí 2

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

☞ *Lôgarit của một thương bằng hiệu các lôgarit.*

■ Đặc biệt: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ ($a, b > 0, a \neq 1$)

Ví dụ 4: Tính $\log_7 49 - \log_7 343 = \log_7 \frac{49}{343} = \log_7 \frac{1}{7} = -\log_7 7 = -1$

2.3. Lôgarit của một lũy thừa

Định lí 3

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Với mọi α , ta có

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

☞ *Lôgarit của một lũy thừa bằng tích của số mũ với lôgarit của cơ số.*

■ Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

Ví dụ 5: Tính giá trị của các biểu thức:

a) $\log_2 4^{\frac{1}{7}} = \log_2 2^{\frac{2}{7}} = \frac{2}{7} \log_2 2 = \frac{2}{7}$

b) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 15 = \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{15}$
 $= \log_5 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

2. Đổi cơ số

Định lí 4

Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

■ Đặc biệt:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} (b \neq 1); \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b (\alpha \neq 0)$$

Ví dụ 6: Tính: a) $2^{\log_4 15}$; $3^{\log_{\frac{1}{27}} 2}$

4. Lôgarit thập phân – lôgarit tự nhiên

4.1. Lôgarit thập phân: là lôgarit cơ số 10.

$\log_{10} b$ được viết là $\log b$ hoặc $lg b$

4.2. Lôgarit tự nhiên: là lôgarit cơ số e

$\log_e b$ được viết là $\ln b$.

BÀI TẬP

Bài 1. Tính giá trị biểu thức

$$A = \log_{\frac{1}{3}} 5 \cdot \log_{25} \frac{1}{27}; \quad B = 4^{3\log_8 3 + 2\log_{16} 5}; \quad C = (4)^{2 - \log_2 3}$$

Bài 2. Tính

a) $\log_2 \frac{1}{8}$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2$

c) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

d) $\log_{0,5} 0,125$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 2 \cdot \sqrt[5]{2}$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 27 \cdot \sqrt[3]{3}$

Bài 3. Tính

a) $4^{\log_2 3}$

b) $27^{\log_9 2}$

c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$

d) $4^{\log_8 27}$

e) $(5)^{\log_{125} 27}$ f) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2 - \log_{\sqrt{3}} 5}$

§4. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

1. Hàm số mũ

1.1. Định nghĩa

Cho số thực dương $a \neq 1$.

Hàm số $y = a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a .

☞ **Chú ý:** Hàm số $y = e^x$ còn được kí hiệu: $y = \exp(x)$.

1.2. Đạo hàm của hàm số mũ

Định lí 1

Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm tại mọi x và

$$(e^x)' = e^x.$$

☞ **Chú ý:** Với $u = u(x)$, ta có: $(e^u)' = u' \cdot e^u$.

Định lí 2

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) có đạo hàm tại mọi x và

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm:

a) $(2^x)' = 2^x \ln 2$

b) $(3^{\cos x})' = (\cos x)' \cdot 3^{\cos x} \ln 3 = -\sin x \cdot 3^{\cos x} \ln 3$

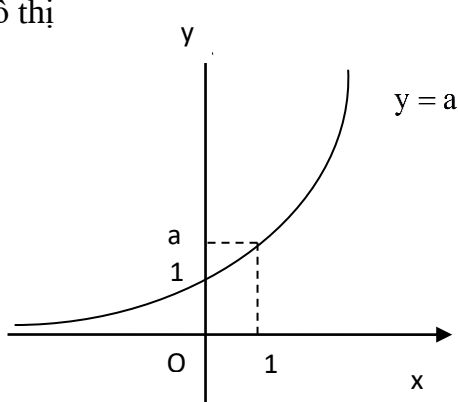
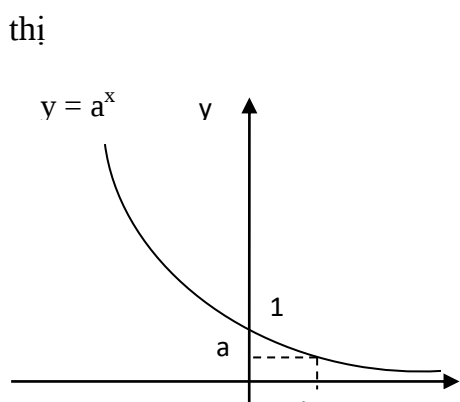
c) $(e^{2x})' = (2x)' e^{2x} = 2 e^{2x}$

d) $(e^{\sin x})' = (\sin x)' e^{\sin x} = \cos x e^{\sin x}$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = 5^{x^2+x+1}$

1.3. Khảo sát hàm số $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$)

$y = a^x, a > 1$	$y = a^x, 0 < a < 1$
------------------	----------------------

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$ 2. Sự biến thiên $y = a^x \ln a > 0, \forall x.$	1. Tập xác định: $\mathbb{R}$ 2. Sự biến thiên $y = a^x \ln a < 0, \forall x.$																														
Giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty.$ Tiệm cận Trục Ox là tiệm cận ngang. 3. Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td><td>$+\infty$</td></tr></table> 4. Đồ thị 	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'		+	+	+	y	0	1	a	$+\infty$	Giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$ Tiệm cận Trục Ox là tiệm cận ngang. 3. Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>a</td><td>0</td></tr></table> 4. Đồ thị 	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'		-	-	-	y	$+\infty$	1	a	0
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'		+	+	+																											
y	0	1	a	$+\infty$																											
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'		-	-	-																											
y	$+\infty$	1	a	0																											

2. Hàm số lôgarit

2.1. Định nghĩa

Cho số thực dương a và $a \neq 1$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a .

- **Lưu ý:** Kí hiệu: $y = \log x$ (hoặc $\lg x$) là hàm số lôgarit cơ số 10;
 $y = \ln x$ là hàm số lôgarit cơ số e .

2.2. Đạo hàm của hàm số lôgarit

Định lý 3

Hàm số $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi điểm tại mọi $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

▪ **Đặc biệt:** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

☞ **Chú ý:** Đối với hàm hợp $y = \log_a u(x)$, ta có

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

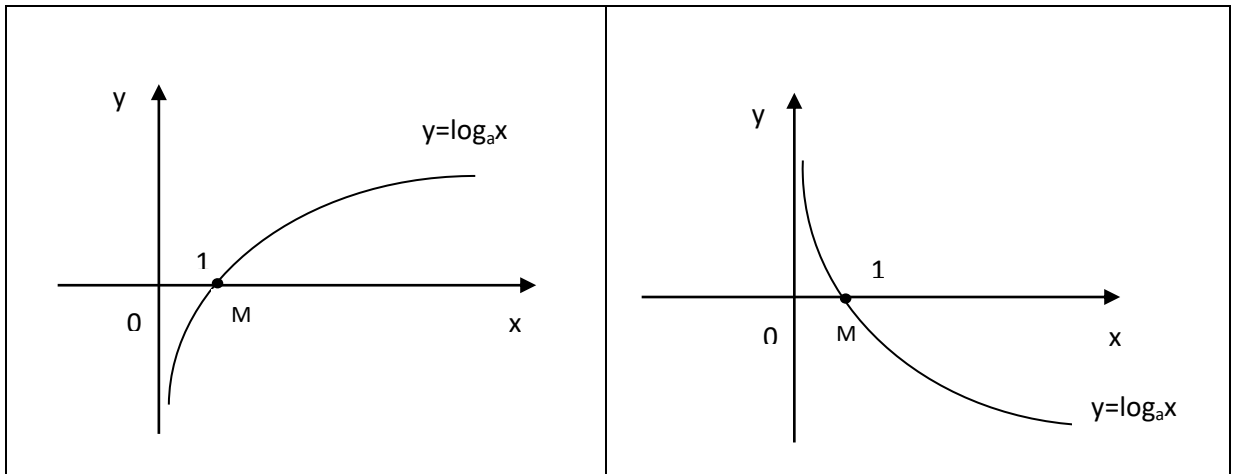
Ví dụ 3: Tính đạo hàm

$$a) \quad (\log_3 \cos x)' = \frac{(\cos x)'}{\cos x \cdot \ln 3} = \frac{-\sin x}{\cos x \cdot \ln 3} = \frac{-\tan x}{\ln 3}$$

$$b) \quad (\ln \sqrt{1+x^2})' = \frac{(\sqrt{1+x^2})'}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2}$$

2.3. Khảo sát hàm số lôgarit $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$)

$a > 1$	$0 < a < 1$
a) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$; tập giá trị là $\mathbb{R}$ b) Đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ c) Đồ thị : -Đi qua điểm $M(1;0)$ -Nằm ở bên phải trục tung -Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.	a) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$; tập giá trị là $\mathbb{R}$ b) Nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ c) Đồ thị : -Đi qua điểm $M(1;0)$ -Nằm ở bên phải trục tung - Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.



BÀI TẬP

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = 2xe^x + 3\sin 2x$; b) $y = 5x^2 - 2^x \cos x$; c) $y = \frac{x+1}{3^x}$.

Bài 2. Vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = 4^x$; b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2(5 - 2x)$; b) $y = \log_3(x^2 - 2x)$;
c) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 3)$; d) $y = \log_{0,4} \frac{3x+2}{1-x}$.

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = 3x^2 - \ln x + 4\sin x$;
b) $y = \log(x^2 + x + 1)$;
c) $y = \frac{\log_3 x}{x}$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2}{\sqrt{4^x - 2}}$; b) $y = \log_6 \frac{8x+2}{1-x}$.

c) $y = \sqrt{\log x + \log(x+2)}$; d) $y = \sqrt{25^x - 5^x}$

Bài 2. Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$.

Bài 3. Biết $4^x + 4^{-x} = 23$. Hãy tính $2^x + 2^{-x}$.

Bài 4. Cho $\log_a b = 3, \log_a c = -2$. Hãy tính $\log_a x$ với:

a) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$; b) $x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$

Bài 5. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = \frac{1}{(2+3x)^2}$; b) $y = \sqrt[3]{(3x-2)^2}$; c) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}$; h) $y = e^x \sin x$;

d) $y = 3x^{-3} - \log_3 x$; e) $y = (3x^2 - 2)\log_2 x$ g) $y = \ln(\cos x)$; i) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$.

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN

Mục tiêu

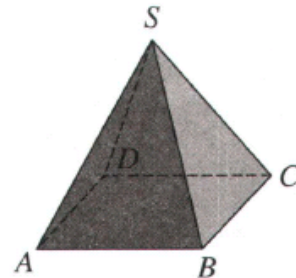
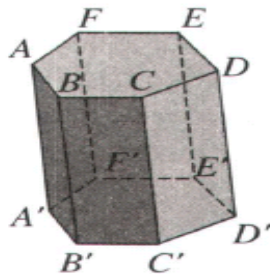
Sau khi nghiên cứu chương này, học sinh có thể:

- Biết được các khái niệm về khối đa diện, khối đa diện lồi, khối đa diện đều
- Giải được các bài tập về khối đa diện, khối đa diện lồi, khối đa diện đều.
- Tính được thể tích của khối đa diện, thể tích khối lăng trụ, thể tích khối chóp.
- Say mê và yêu thích tìm hiểu các bài toán về khối đa diện.

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khối lăng trụ và khối chóp

- **Khối lăng trụ** (khối chóp, khối chóp cắt) là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ (hình chóp, hình chóp cắt) kể cả hình lăng trụ (hình chóp, hình chóp cắt) ấy.
- Tên gọi và các thành phần: đỉnh, cạnh, mặt bên, ... được đặt tương ứng với hình tương ứng.



- Điểm trong – Điểm ngoài.

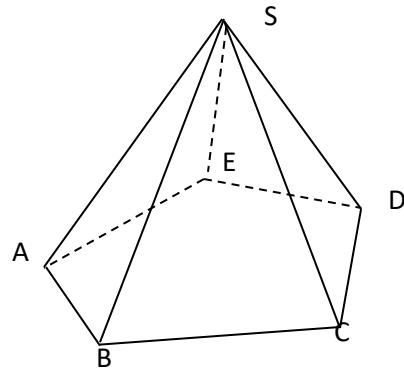
Ví dụ 1: Hộp bánh đó là hình lăng trụ, hình kim tự tháp ai cập đó là hình chóp, hình quả cân đó là hình chóp cắt.

2. Khái niệm về hình đa diện, và khối đa diện

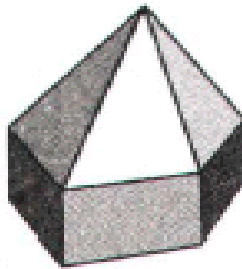
2.1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

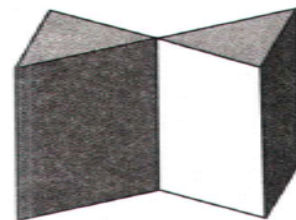
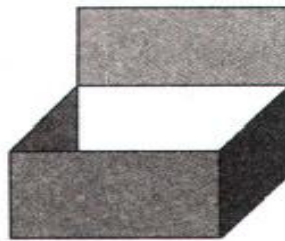
- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể: hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.



Ví dụ 2: Hình đa diện



Ví dụ 3: Hình không phải đa diện

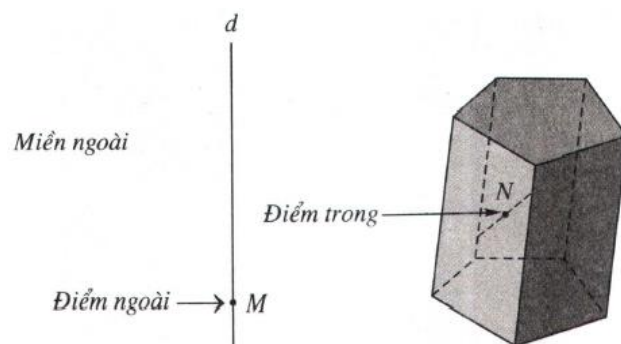


2.2. Khái niệm về khối đa diện

• **Khối đa diện** là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

• Tên gọi và các thành phần: đỉnh, cạnh, mặt bên, ... được đặt tương ứng với hình đa diện tương ứng.

• Điểm trong – Điểm ngoài



Miền trong – Miền ngoài

• Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đấy.

Ví dụ 4: Viên kim cương là khối đa diện.

3. Hai đa diện bằng nhau

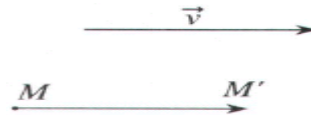
3.1. Phép dời hình trong không gian

• Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

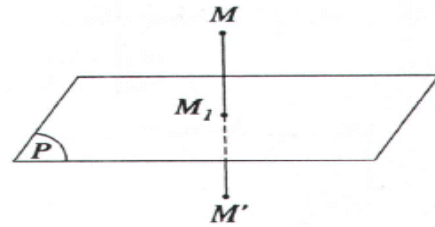
• Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

a) Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$

$$T_{\vec{v}} : M \mapsto M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$



b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)



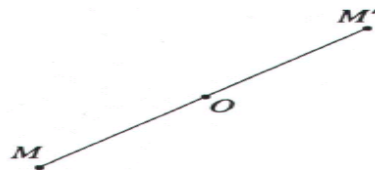
$$D_{(P)} : M \mapsto M'$$

– Nếu $M \in (P)$ thì $M' \equiv M$,

– Nếu $M \notin (P)$ thì MM' nhận (P) làm mặt phẳng trung trực.

c) Phép đối xứng tâm O

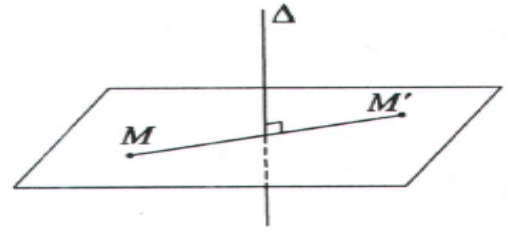
$$D_O : M \mapsto M'$$



– Nếu $M \equiv O$ thì $M' \equiv O$,

– Nếu $M \neq O$ thì MM' nhận O làm trung điểm.

d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ



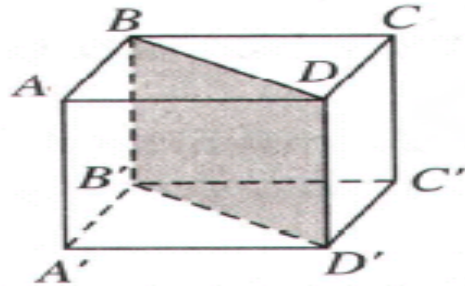
$$D_{\Delta}: M \mapsto M'$$

- Nếu $M \in \Delta$ thì $M' \equiv M$,
- Nếu $M \notin \Delta$ thì MM' nhận Δ làm đường trung trực.

Nhận xét:

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Nếu phép dời hình biến (H) thành (H') thì nó biến đỉnh, mặt, cạnh của (H) thành đỉnh, mặt, cạnh tương ứng của (H') .

Ví dụ 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Tìm ảnh của tứ giác $ABCD$ qua:

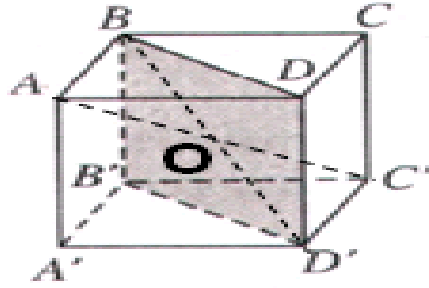


- a) Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$;
- b) Phép đối xứng qua mặt phẳng $(BB'D'D)$;
- c) Phép đối xứng tâm O ;
- d) Phép đối xứng qua đường thẳng AC' .

3.2. Hai hình bằng nhau

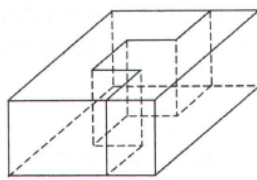
- Hai hình đgl bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.
- Hai đa diện đgl bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

Ví dụ 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh hai lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$ bằng nhau.

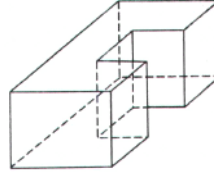


4. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện

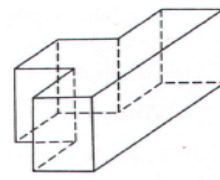
Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1) và (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) , hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H) .



(H)



(H₁)

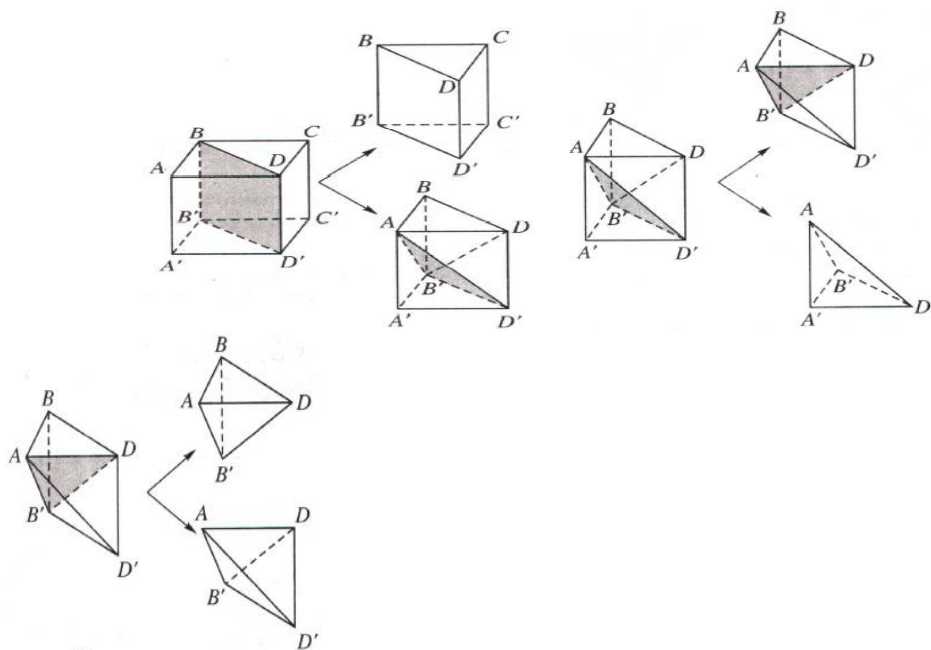


(H₂)

Ví dụ 7: Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D'.

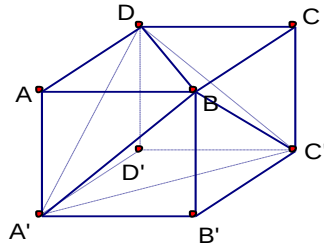
- Chia khối lập phương thành 2 khối lăng trụ;
- Chia khối lăng trụ ABD.A'B'D' thành 3 khối tứ diện.

■ **Nhận xét:** Một khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia được thành những khối tứ diện.



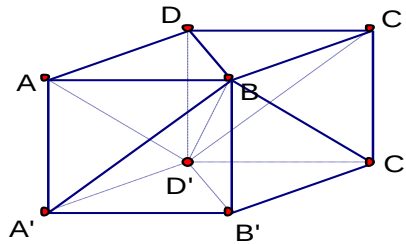
BÀI TẬP

Bài 1: Chia một khối lập phương thành 5 khối tứ diện.



Bài 2: Chia một khối lập phương thành 6 khối tứ diện bằng nhau.

- Nêu cách chia?
- Nêu cách chứng minh các khối tứ diện bằng nhau?



Bài 3: Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác thì số mặt phải là số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4, 6, 8, 10.

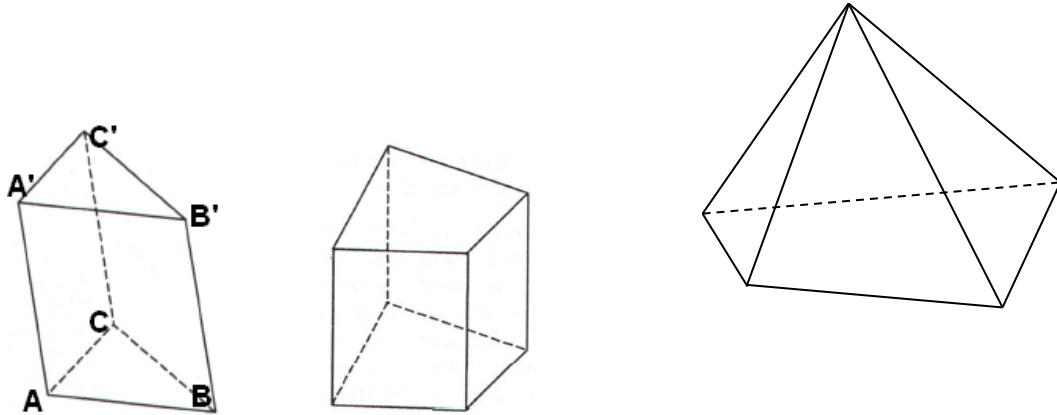
Bài 4: Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh thì đó là khối tứ diện.

§2. KHỐI ĐA DIỆN LỖI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

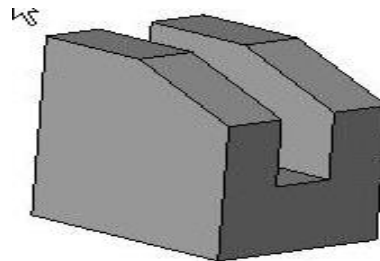
1. Khối đa diện lồi

Khối đa diện (H) được gọi là **khối đa diện lồi** nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó, đa diện xác định (H) được gọi là **đa diện lồi**.

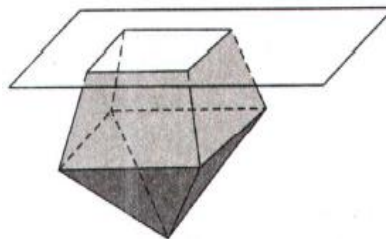
Ví dụ 1: Các khối lăng trụ tam giác, khối hộp, khối tứ diện là những khối đa diện lồi.



Ví dụ 2: Khối đa diện không lồi



Nhận xét: Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng chứa một mặt của nó.



2. Khối đa diện đều

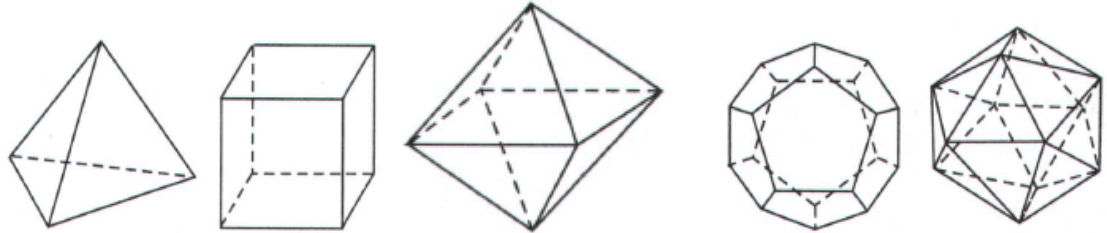
Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có các tính chất sau:

- Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh;

b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là **khối đa diện đều loại $(p; q)$** .

Định lý: Chỉ có 5 loại khối đa diện. Đó là các loại $[3; 3]$, $[4; 3]$, $[3; 4]$, $[5; 3]$, $[3; 5]$.



Từ trái qua phải lần lượt là các khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều.

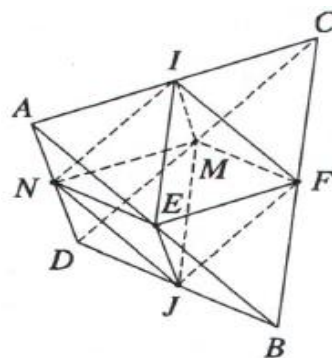
Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
$\{3; 3\}$	Tứ diện đều	4	6	4
$\{4; 3\}$	Lập phương	8	12	6
$\{3; 4\}$	Bát diện đều	6	12	8
$\{5; 3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12
$\{3; 5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

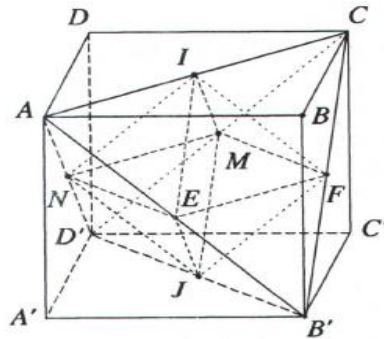
- Trung điểm các cạnh của một tứ diện đều là các đỉnh của một hình bát diện đều;
- Tâm các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình bát diện đều.

Giải



- Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh bằng a . Gọi I, J, E, F, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, BC, CD , và DA .

Tám tam giác đều trên tạo thành một đa diện có các đỉnh I, J, E, F, M, N mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng bốn tam giác đều. Do đó đa diện ấy là đa diện đều loại $\{3; 4\}$, tức là hình bát diện đều.



b) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a. Gọi I, J, E, F, M và N lần lượt là tâm của các mặt $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$ của hình lập phương. Để ý rằng 6 điểm trên cùng lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC, AB'CD', B'D', AB', B'C, CD'$ và DA của tứ diện đều nên theo câu a) sáu điểm đó là các đỉnh của hình bát diện đều.

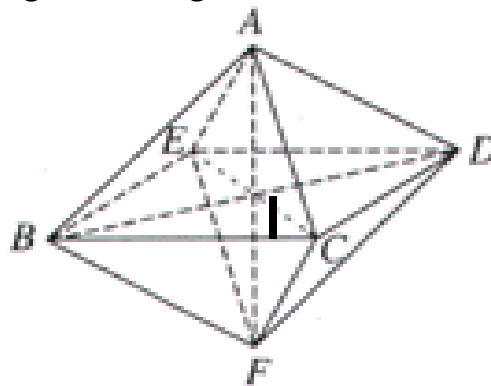
BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình lập phương (H). Gọi (H') là hình bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của (H). Tính tỉ số diện tích toàn phần của (H) và (H').

Bài 2: Chứng minh rằng tâm của các mặt của hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.

Bài 3: Cho hình bát diện đều ABCDEF. Chứng minh rằng:

- Các đoạn thẳng AF, BD và CE đôi một vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường;
- ABFD, AEFC và BCDE là những hình vuông.



§3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1. Thể tích của khối đa diện

• Thể tích của khối đa diện (H) là một số dương duy nhất $V_{(H)}$ thỏa mãn các tính chất sau:

a) Nếu (H) là khối lập phương có cạnh bằng 1 thì $V_{(H)} = 1$;

b) Nếu hai khối đa diện (H_1), (H_2) bằng nhau thì $V_{(H_1)} = V_{(H_2)}$;

c) Nếu khối đa diện (H) được phân chia thành hai khối đa diện (H_1), (H_2) thì

$$V_{(H)} = V_{(H_1)} + V_{(H_2)}.$$

• $V_{(H)}$ cũng được gọi là thể tích của hình đa diện giới hạn khối đa diện (H);

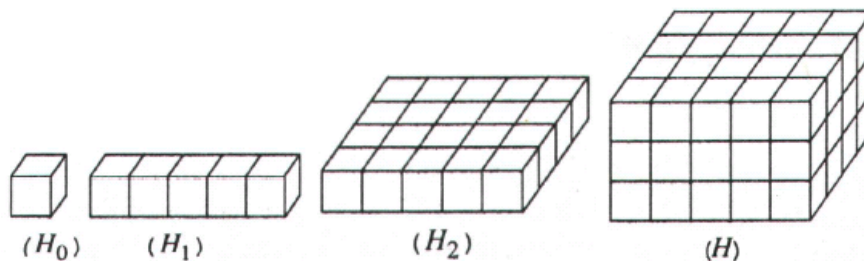
• Khối lập phương có cạnh bằng 1 được gọi là khối lập phương đơn vị.

Ví dụ 1: Tính thể tích của khối hộp chữ nhật có 3 kích thước là những số nguyên dương.

a) Có thể chia (H_1) thành bao nhiêu khối (H_0)?

b) Có thể chia (H_2) thành bao nhiêu khối (H_1)?

c) Có thể chia (H) thành bao nhiêu khối (H_2)?



Định lý: Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.

$$V = abc$$

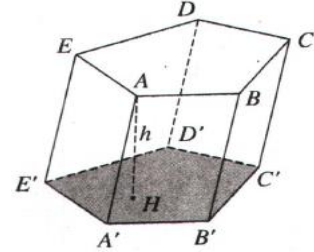
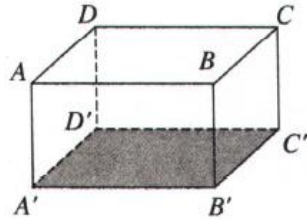
Ví dụ 2: Gọi a , b , c , V lần lượt là ba kích thước và thể tích của khối hộp chữ nhật. Tính và điền vào ô trống:

a	b	c	V
1	2	3	
4		3	24
$\frac{1}{2}$	2	3	
1	$\frac{1}{3}$		1

2. Thể tích khối lăng trụ

Định lý: Thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đáy B nhân với chiều cao h .

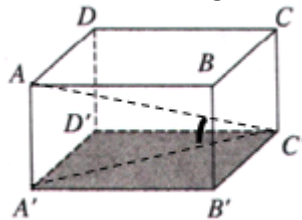
$$V = B \cdot h$$



Ví dụ 3: Gọi S , h , V lần lượt là thể diện tích đáy, chiều cao và thể tích khối lăng trụ. Tính và điền vào ô trống:

S	h	V
8	7	
	8	4
8		4
	$\frac{3}{2}$	12

Ví dụ 4: Cho lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy bằng a . Góc giữa đường chéo AC' và đáy bằng 60° . Tính thể tích của hình lăng trụ.



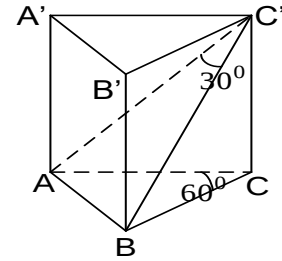
Hướng dẫn: $\angle AC'A' = 60^\circ$ và

$$h = CC' = AC \cdot \tan 60^\circ$$

$$= a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABCD} \cdot CC' = a^3\sqrt{3}.$$

Ví dụ 5: Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác vuông tại A , $AC = b$, $\angle C = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $BB'C'C$ tạo với mp($AA'C'C$) một góc 30° . Tính thể tích của lăng trụ.



Hướng dẫn: $\angle BCA = 30^\circ$

$$AC' = AB \cdot \cot 30^\circ = 3b$$

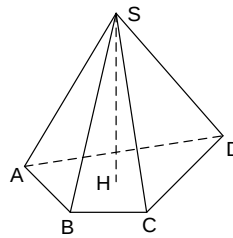
$$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2\sqrt{2}b$$

$$\Rightarrow V = b^3\sqrt{6}.$$

3. Thể tích khối chóp

Định lý: Thể tích khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ diện tích đáy B nhân với chiều cao h .

$$V = \frac{1}{3} Bh$$



Ví dụ 6: Gọi S , h , V lần lượt là thể diện tích đáy, chiều cao và thể tích khối chóp. Tính và điền vào ô trống:

S	h	V
8	7	
	8	4
8		4
	$\frac{3}{2}$	12

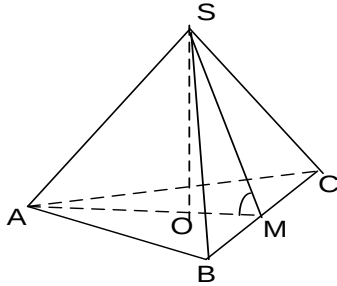
Ví dụ 7: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Tính thể tích khối chóp nếu biết:

a) $AB = a$ và $SA = b$;

b) $SA = b$ và góc giữa mặt bên và đáy bằng α .

Hướng dẫn

$$a) h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$$



b)

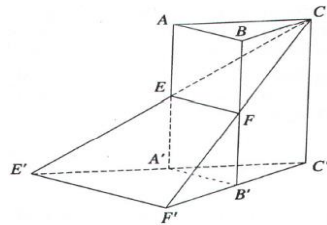
$$\begin{cases} h = OM \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \alpha \\ h^2 = SA^2 - OA^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \tan \alpha}{\sqrt{4 + \tan^2 \alpha}}$$

$$h = \frac{b \cdot \tan \alpha}{\sqrt{4 + \tan^2 \alpha}}$$

Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AA' , BB' . Đường thẳng CE cắt $C'A'$ tại E' . Đường thẳng CF cắt $C'B'$ tại F' . Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Tính thể tích khối chóp C.ABFE theo V;

b) Gọi khối đa diện (H) là phần còn lại của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ sau khi cắt bỏ đi khối chóp C.ABFE. Tính tỉ số thể tích của (H) và của khối chóp C.C'E'F'.



BÀI TẬP

Bài 1: Cho lăng trụ tam giác ABC. $A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều các điểm A, B, C. Cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° .

a) Tính thể tích khối lăng trụ;

b) Chứng minh $BCC'B'$ là một hình chữ nhật.

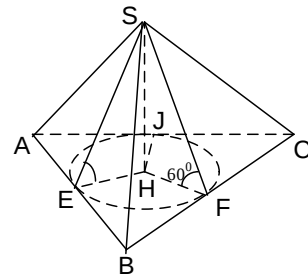
Bài 2: Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mp(ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích khối tứ diện CDFE theo a.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy 3 điểm A' , B' , C' khác S. Chứng minh:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

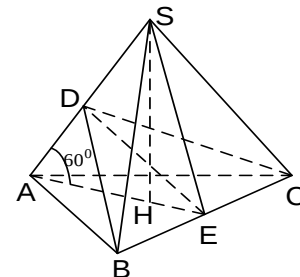
Bài 1: Cho hình chóp tam giác S.ABC có $AB = 5a$, $BC = 6a$, $CA = 7a$. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp đó.



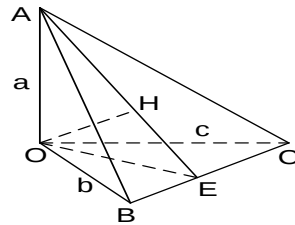
Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh $AB = a$. Các cạnh bên SA, SB, SC tạo với đáy một góc 60° . Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA.

a) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S.DBC và S.ABC;

b) Tính thể tích của khối chóp S.DBC.

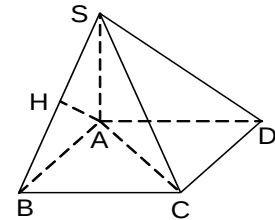


Bài 3: Cho hình chóp tam giác $O.ABC$ có ba cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tính độ dài đường cao OH của hình chóp.



Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh $SA = a$ và SA vuông góc với đáy.

- Tính thể tích khối chóp $S.ABC$;
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .



Chương II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

Mục tiêu

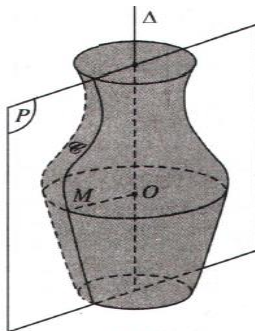
Sau khi nghiên cứu chương này, học sinh có thể:

- Biết được các khái niệm về mặt nón, mặt trụ, mặt cầu
- Giải được các bài tập về hình nón, khối nón, hình trụ, khối cầu.
- Tính được .
- Say mê và yêu thích tìm hiểu các bài toán về mặt nón, mặt trụ, mặt cầu.

§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

1. Sự tạo thành mặt tròn xoay

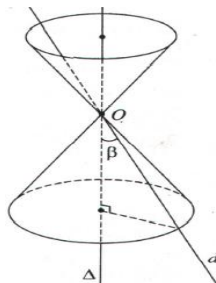
Trong không gian, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và một đường (C). Khi quay (P) quanh Δ một góc 360° thì mỗi điểm M trên (C) vạch ra một đường tròn có tâm O thuộc Δ và nằm trên mp vuông góc với Δ . Khi đó (C) sẽ tạo nên một hình được gọi là mặt tròn xoay. (C) được gọi là đường sinh của mặt tròn xoay đó. Δ được gọi là trục của mặt tròn xoay.



2. Mặt nón tròn xoay

2.1. Mặt nón tròn xoay

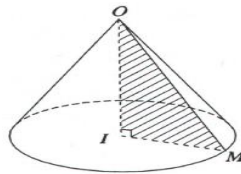
Trong mặt phẳng (P) có hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại điểm O và tạo thành góc nhọn β . Khi quay (P) xung quanh Δ thì d sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O. Δ gọi là trục, d gọi là đường sinh, góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón đó.



2.2. Hình nón tròn xoay

Cho $\triangle OIM$ vuông tại I . Khi quay nó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình được gọi là hình nón tròn xoay.

- Hình tròn (I, IM): mặt đáy
- O : đỉnh
- OI : đường cao
- OM : đường sinh
- Phần mặt tròn xoay sinh ra bởi OM : mặt xung quanh.



2.3. Khối nón tròn xoay

Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó được gọi là khối nón tròn xoay.

- Điểm ngoài: Điểm không thuộc khối nón.
- Điểm trong: Điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón.
- Đỉnh, mặt đáy, đường sinh

2.4. Diện tích xung quanh của hình nón

a) Một hình chóp được gọi là nội tiếp hình nón nếu đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đường tròn đáy của hình nón và đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón.

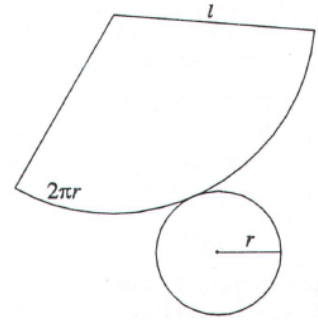
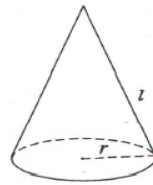
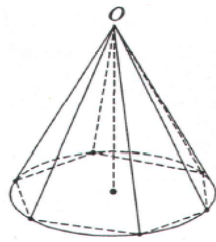
Diện tích xung quanh của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

b) Diện tích xung quanh của hình nón bằng nửa tích độ dài đường tròn đáy với độ dài đường sinh:

$$S_{xq} = \pi r l$$

Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.

Chú ý: Nếu cắt mặt xung quanh của hình nón theo một đường sinh rồi trải ra trên một mặt phẳng thì ta được một hình quạt có bán kính bằng độ dài đường sinh và một cung tròn có độ dài bằng chu vi đường tròn đáy của hình nón. Khi đó: $S_{xq} = S_{quạt} = \pi r l$.



2.5. Thể tích khối nón

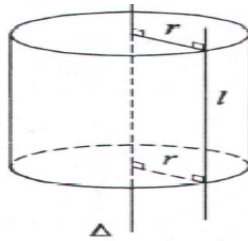
Thể tích khối nón là giới hạn của thể tích khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn, với h là khoảng cách từ đỉnh tới đáy. Khi đó:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

3. Mặt trụ tròn xoay

3.1. Mặt trụ tròn xoay

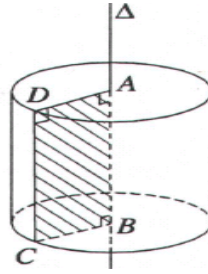
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay (P) xung quanh Δ thì l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay. Δ gọi là trục, l gọi là đường sinh, r là bán kính của mặt trụ đó.



3.2. Hình trụ tròn xoay

Xét hình chữ nhật ABCD. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa 1 cạnh, chẳng hạn AB, thì đường gấp khúc ADCB tạo thành một hình được gọi là hình trụ tròn xoay.

- Hai đáy.
- Đường sinh.
- Mặt xung quanh.
- Chiều cao.



3.3. Khối trụ tròn xoay

Phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ kể cả hình trụ đó được gọi là *khối trụ tròn xoay*.

- Điểm ngoài.
- Điểm trong.
- Mặt đáy, đường sinh, chiều cao

3.4. Diện tích xung quanh của hình trụ

a) Một hình lăng trụ được gọi là nội tiếp một hình trụ nếu hai đáy của hình lăng trụ nội tiếp hai đường tròn đáy của hình trụ.

Diện tích xung quanh của hình trụ là giới hạn của diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

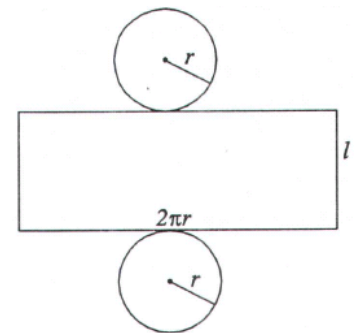
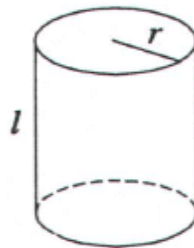
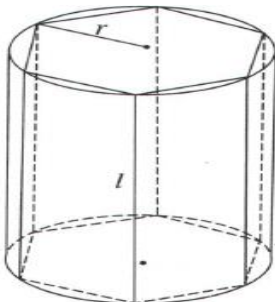
b) Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.

Khi đó: $S_{xq} = 2\pi rl$

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích của hai đáy.

Chú ý: Nếu cắt mặt xung quanh của hình trụ theo một đường sinh, rồi trải ra trên một mặt phẳng thì sẽ được một hình chữ nhật có một cạnh bằng đường sinh l và một cạnh bằng chu vi đường tròn đáy. Khi đó:

$$S_{xq} = S_{hcn} = 2\pi rl$$



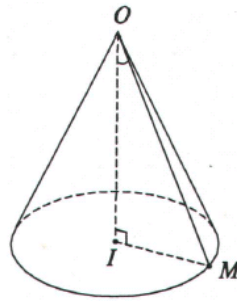
3.5. Thể tích khối trụ

Thể tích khối trụ là giới hạn của thể tích khối lăng trụ đều nội tiếp khối trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn, với h là khoảng cách giữa hai mặt đáy. Khi đó:

$$V = \pi r^2 h$$

Ví dụ 1: Cho tam giác OIM vuông tại I, góc $IOM = 30^\circ$, $IM = 2a$. Khi quay $\triangle OIM$ quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

- Tính diện tích xung quanh của hình nón đó;
- Tính thể tích khối nón tròn xoay tạo thành.



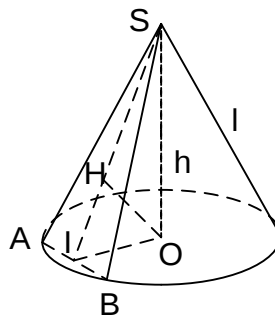
Giải

Ta có: $l = OM = 4a$. Do đó: $S_{xq} = \pi rl = 4\pi a^2$

Ta có: $h = OI = 2a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{8\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\text{ cm}$.

- Tính diện tích xung quanh của hình nón ;
- Tính thể tích khối nón tạo thành;
- Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm . Tính diện tích thiết diện đó.



Giải

a) Ta có: $SB = \sqrt{h^2 + r^2} = 5\sqrt{41}$. $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{41} = 125\sqrt{41} \pi \text{ cm}^2$.

b) Thể tích khối nón là: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 25^2 \cdot 20 = 12500\pi \text{ cm}^3$

c) Ta có: $OH \perp SI$ (I là trung điểm của AB), Do đó: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OI = 15 \text{ (cm)}$

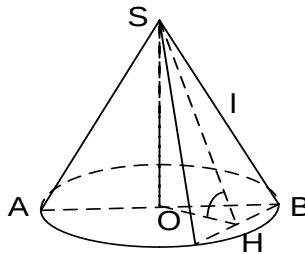
$AB = 2IB = 40\text{cm}$, $SI = 25\text{cm}$ là đường cao của tam giác SAB.

Vậy: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SI \cdot AB = 25 \cdot 20 = 500\text{cm}^2$.

Ví dụ 3: Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục của hình nón ta được một tam giác SAB vuông cân tại S có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng;

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mp(SBC) tạo với mp chứa đáy hình nón một góc 60° . Tính diện tích tam giác SBC.



Giải

a) $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $l = a$. Khi đó:

$$S_{xq} = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}, S_{\text{đáy}} = \frac{\pi a^2}{2}; V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$$

b) Ta có: $\angle SHO = 60^\circ$. Do đó: $OH = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$, $BC = 2HB = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, $SH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H là trung điểm BC. Cho tam giác SAB quay quanh SA 360° để tạo thành hình nón. Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Cho tam giác SAC quay quanh SA 360° để tạo thành hình nón. Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

Bài 3: Cho hình nón tròn xoay có độ dài đường sinh $l = 40\text{cm}$, bán kính đáy $r = 20\text{ cm}$.

- a) Tính diện tích xung quanh của hình nón;
- b) Tính thể tích khối nón tạo thành;
- c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 5 cm. Tính diện tích thiết diện đó.

Bài 4: Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao $R\sqrt{3}$. A và B là 2 điểm trên 2 đường tròn đáy sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là 30° .

- a) Tính diện tích thiết diện qua AB và song song với trục của hình trụ;
- b) Tính S_{xq} , S_{tp} , V của khối trụ.

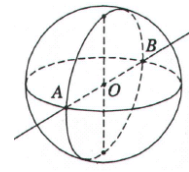
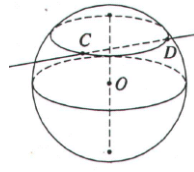
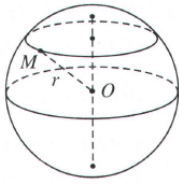
§2. MẶT CẦU

1. Mặt cầu và các khái niệm liên quan đến mặt cầu

1.1. Mặt cầu

Tập hợp những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng không đổi bằng r ($r > 0$) được gọi là mặt cầu tâm O bán kính r . Kí hiệu $S(O; r)$. $S(O; r) = \{M | OM = r\}$

- Một mặt cầu được xác định nếu biết tâm và bán kính của nó.



1.2. Điểm nằm trong và nằm ngoài mặt cầu. Khối cầu

- Cho $S(O; r)$ và điểm A bất kì.

- $OA = r \Leftrightarrow A$ nằm trên (S) ;
- $OA < r \Leftrightarrow A$ nằm trong (S) ;
- $OA > r \Leftrightarrow A$ nằm ngoài (S) .

• Tập hợp các điểm thuộc $S(O; r)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu hoặc hình cầu tâm O bán kính r .

1.3. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu

– Mặt cầu là mặt tròn xoay được tạo bởi một nửa đường tròn quay quanh trục chứa đường kính của đường tròn đó.

– Giao tuyến của mặt cầu với các nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến của mặt cầu.

– Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu.

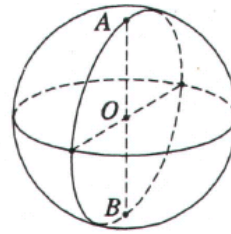
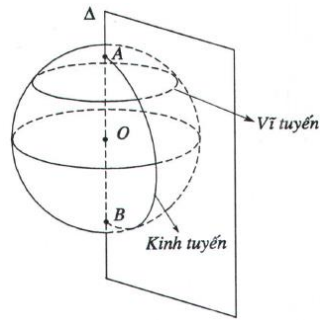
– Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực.

1.4. Biểu diễn mặt cầu

Nhận xét: Hình biểu diễn của mặt cầu qua phép chiếu vuông góc là một hình tròn.

– Vẽ một đường tròn có tâm và bán kính là tâm và bán kính của mặt cầu;

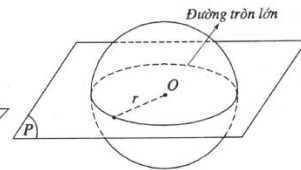
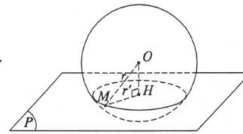
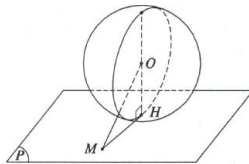
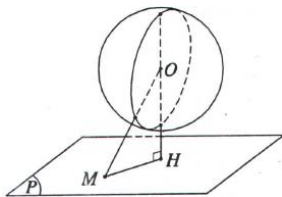
– Vẽ thêm một vài kinh tuyến, vĩ tuyến của mặt cầu đó.



2. Giao của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(O; r)$ và mặt phẳng (P) . Đặt $h = d(O, (P))$.

- $h > r \Leftrightarrow (P)$ và (S) không có điểm chung;
- $h = r \Leftrightarrow (P)$ tiếp xúc với (S) ;
- $h < r \Leftrightarrow (P)$ cắt (S) theo đường tròn tâm H , bán kính $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$.



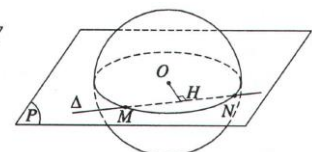
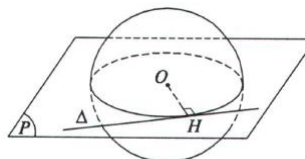
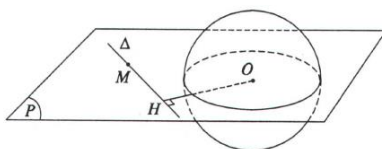
Chú ý:

- Điều kiện cần và đủ để (P) tiếp xúc với $S(O; r)$ tại H là (P) vuông góc với OH tại H .
- Nếu $h = 0$ thì (P) cắt (S) theo đường tròn tâm O bán kính r . Đường tròn này được gọi là đường tròn lớn và (P) được gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu (S) .

3. Giao của mặt cầu với đường thẳng. Tiếp tuyến của mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; r)$ và đường thẳng Δ . Gọi $d = d(O, \Delta)$.

- $d > r \Leftrightarrow \Delta$ và (S) không có điểm chung;
- $d = r \Leftrightarrow \Delta$ tiếp xúc với (S) ;
- $d < r \Leftrightarrow \Delta$ cắt (S) tại hai điểm M, N phân biệt.



• **Chú ý:**

- ❖ Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; r)$ tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại H . Δ được gọi là tiếp tuyến, H được gọi là tiếp điểm.
- ❖ Nếu $d = 0$ thì Δ đi qua tâm O và cắt (S) tại hai điểm A, B . AB là đường kính của (S) .

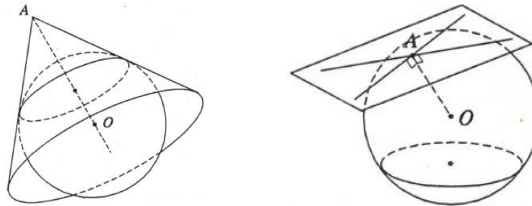
Nhận xét:

a) Qua một điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; r)$ có vô số tiếp tuyến của (S) . Tất cả các tiếp tuyến này đều nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A ;

b) Qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; r)$ có vô số tiếp tuyến với (S) . Các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón đỉnh A . Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ A đến các tiếp điểm đều bằng nhau.

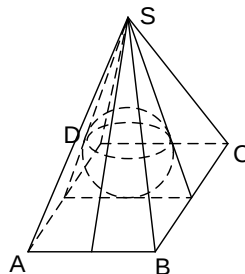
– Tại mỗi điểm trên đường tròn có 1 tiếp tuyến.

– Qua 1 điểm nằm ngoài đường tròn có 2 tiếp tuyến. Các đoạn tiếp tuyến là bằng nhau.



• Mặt cầu được gọi là nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện.

• Mặt cầu được gọi là ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu.



4. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Cho mặt cầu $S(O; r)$.

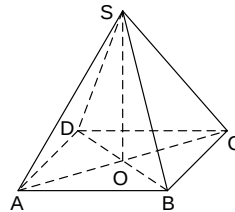
- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi r^2$

- Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Chú ý:

- Diện tích mặt cầu bằng 4 lần diện tích hình tròn lớn của mặt cầu đó.
- Thể tích khối cầu bằng thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu và có chiều cao bằng bán kính của khối cầu đó.

Ví dụ 1: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, ΔSAC vuông tại S. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



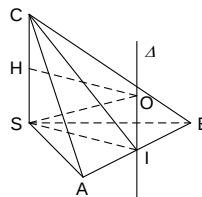
Giải

$$\Delta SAC \text{ vuông tại } S \Rightarrow OS = OA = OC$$

$$\Rightarrow OS = OA = OC = OB = OD$$

$$\Rightarrow O \text{ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABCD. \text{ Khi đó: } R = OA = a.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



Giải

Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó: I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Qua I dựng trục Δ vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt trung trực của SC cắt Δ tại một điểm O. Khi đó:

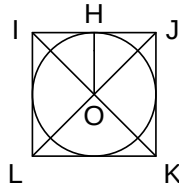
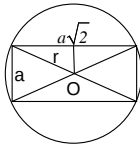
$$OA = OB = OC = OS \Rightarrow O \in \Delta \text{ và } O \text{ thuộc mặt phẳng trung trực của } SC.$$

$$R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

Ví dụ 3: Cho mặt cầu bán kính 2cm. Tính thể tích của hình lập phương:

a) Nội tiếp mặt cầu.

b) Ngoại tiếp mặt cầu.



Giải

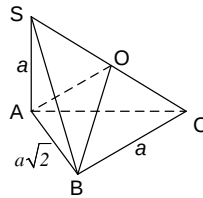
Cạnh hình lập phương nội tiếp mặt cầu: $a = 2\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow V_1 = 16\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

Cạnh hình lập phương ngoại tiếp mặt cầu: $b = 4 \text{ cm} \Rightarrow V_2 = 64 \text{ cm}^3$

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi O là trung điểm của SC.

a) Chứng minh A, B, C, S cùng nằm trên một mặt cầu;

b) Cho $SA = BC = a$ và $AB = a\sqrt{2}$. Tính bán kính mặt cầu trên.



Giải

a) ΔSAC vuông tại A $\Rightarrow OA = OC = OS$

ΔSBC vuông tại B $\Rightarrow OB = OC = OS$

b) Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3a^2$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = 4a^2 \Rightarrow SC = 2a \Rightarrow R = a.$$

BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H là trung điểm BC. Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 3: Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60° .

- a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ;
- b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu tương ứng.

Bài 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi O là trung điểm của SC.

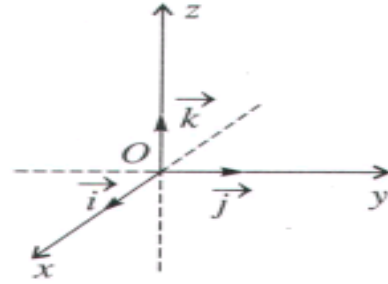
- a) Chứng minh A, B, C, S cùng nằm trên một mặt cầu ;
- b) Cho $SA = BC = a\sqrt{2}$ và $AB = a$. Tính bán kính mặt cầu trên.

§3. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Tọa độ của điểm và của vector

1.1. Hệ tọa độ

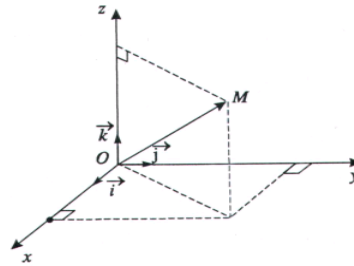
Hệ tọa độ Đề-các vuông góc trong không gian là hệ gồm 3 trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một, với các vector đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

• Tọa độ của một điểm



$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ví dụ 1: Xác định các điểm $M(0;0;0)$, $A(0; 1; 2)$, $B(1; 0; 2)$, $C(1; 2; 0)$ trong không gian Oxyz.

1.2. Tọa độ của vector

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

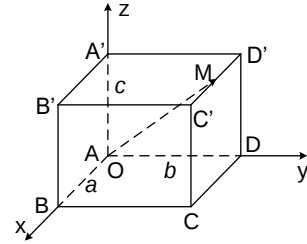
■ Nhận xét

$$\bullet M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$$

$$\bullet \text{Toạ độ của các vector đơn vị: } \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$$

$$\bullet \text{Véc tơ- Không: } \vec{0} = (0; 0; 0)$$

Ví dụ 2: Trong KG Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đỉnh A trùng với O, các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AM}$, với M là trung điểm của cạnh C'D'.



2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vector

Định lý: Trong KG Oxyz, cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó:

i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

iii) $k\vec{a} = k(a_1; a_2; a_3) = (ka_1; ka_2; ka_3) \quad (k \in \mathbb{R})$

Hệ quả

• $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

- Với $\vec{b} \neq 0$

$\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$

- Cho $A(x_A; y_A; z_A); B(x_B; y_B; z_B)$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

M là trung điểm của đoạn AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

3. Tích vô hướng

3.1. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định lý: Trong không gian Oxyz, cho: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

3.2. Ứng dụng

a) Độ dài của một vector: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

b) Khoảng cách giữa hai điểm: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

c) Góc giữa hai vector

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Từ đó suy ra $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

Ví dụ 3: Trong KG Oxyz, cho $A(1;1;1)$, $B(-1;2;3)$, $C(0;4;-2)$.

a) Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM}$ (M là trung điểm của BC).

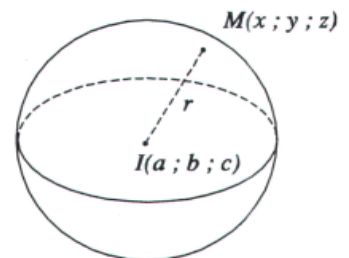
b) Tìm tọa độ của vector $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$;

c) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{AC})$

4. Phương trình mặt cầu

Định lý: Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính r có phương trình:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$



Ví dụ 4: Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $r = 5$.

Nhận xét: Phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu có tâm

$I(-a; -b; -c)$ và bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ví dụ 5: Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 5 = 0$$

Giải

Phương trình mặt cầu đã cho tương đương với phương trình sau:

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 3^2$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I = (-2; 1; -3)$, bán kính $r = 3$.

Ví dụ 6: Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình:

a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 64;$

c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z - 4 = 0;$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 5 = 0$

Ví dụ 7: Viết phương trình mặt cầu (S):

a) (S) có tâm $I(1; -3; 5)$, $r = \sqrt{3};$

b) (S) có tâm $I(2; 4; -1)$ và đi qua điểm $A(5; 2; 3);$

c) (S) có đường kính AB với $A(2; 4; -1)$, $B(5; 2; 3).$

BÀI TẬP

Bài 1: Cho ba vector $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

a) Tính tọa độ của vector $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$;

b) Tính tọa độ của vector $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

Bài 2: Cho ba điểm $A = (1; -1; 1)$, $B = (0; 1; 2)$, $C = (1; 0; 1)$.

Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Bài 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A = (1; 0; 1)$, $B = (2; 1; 2)$, $D = (1; -1; 1)$, $C' = (4; 5; -5)$.

Tính tọa độ còn lại của hình hộp.

Bài 4: Tính

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ với $\vec{a} = (3; 0; -6)$, $\vec{b} = (2; -4; 0)$; b) $\vec{c} \cdot \vec{d}$ với $\vec{c} = (1; -5; 2)$, $\vec{d} = (4; 3; -5)$.

Bài 5: Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$.

Bài 6: Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau:

a) Có đường kính AB với $A = (4; -3; 7)$, $B = (2; 1; 3)$;

b) Đi qua điểm $A = (5; -2; 1)$ và có tâm $C = (3; -3; 1)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , ΔSAC vuông tại S . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3$, $SB = 4$, $SC = 5$ và ba cạnh SA , SB , SC đôi một vuông góc. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 3: Cho tam giác OIM vuông tại I , góc $IOM = 45^\circ$, $IM = a$. Khi quay ΔOIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

- a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đó;
- b) Tính thể tích khối nón tròn xoay tạo thành.

Bài 4: Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = a$, bán kính đáy $r = b$.

- a) Tính diện tích xung quanh của hình nón;
- b) Tính thể tích khối nón tạo thành;
- c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d . Tính diện tích thiết diện đó.

Bài 5: Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục của hình nón ta được một tam giác SAB vuông cân tại S có cạnh huyền bằng $a\sqrt{3}$.

- a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng;
- b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mp (SBC) tạo với mp chứa đáy hình nón một góc 45° . Tính diện tích tam giác SBC .

Bài 6 : Cho mặt cầu bán kính r . Tính thể tích của hình lập phương:

- a) Nội tiếp mặt cầu;
- b) Ngoại tiếp mặt cầu.

Bài 7 : Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a

- a) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương;
- b) Tính diện tích mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương.

Bài 8: Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h

Bài 9: Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp, tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao h

Bài 10. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC biết $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc. CMR: Điểm S, trọng tâm ΔABC , và tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC thẳng hàng.

Bài 11: Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O; r)$ kẻ hai đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại A, B và C, D.

- a) Chứng minh: $MA.MB = MC.MD$;
- b) Đặt $MO = d$. Tính $MA.MB$ theo r và d .

Bài 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

Bài 13: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (P) qua A, K và song song với BD, chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Tính thể tích của hai khối đa diện đó.

Bài 14. Cho bốn điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(-2; 1; -1)$.

- a) Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện;
- b) Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD;
- c) Tính độ dài đường cao của hình chóp A.BCD.

Bài 15: Cho mặt cầu (S) có đường kính là AB biết rằng $A(6; 2; -5)$, $B(-4; 0; 7)$.

- a) Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu (S);
- b) Lập phương trình của mặt cầu (S).

PHÂN PHỐI CHƯƠNG TRÌNH

Số TT	Tên các bài trong học phần	Tổng số (giờ)			
		Lý thuyết	Bài tập	Kiểm tra	Tổng số
A	TOÁN 5A: ĐẠI SỐ	21	22	2	45
1	Chương I: Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số	13	11	1	25
	1. Đạo hàm cấp hai	2	2		4
	2. Tính đơn điệu của hàm số	2	1		3
	3. Cực trị của hàm số	2	1		3
	4. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	2	2		4
	5. Đường tiệm cận	2	1		3
	6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số	3	2		5
	7. Ôn tập chương và kiểm tra	0	2	1	3
2	Chương II: Hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số lôgarit	8	11	1	20
	1. Lũy thừa	2	2		4
	2. Hàm số lũy thừa	2	1		3
	3. Lôgarit	2	2		4

B	4. Hàm số mũ. Hàm số lôgarit	2	1		3
	5. Ôn tập chương và kiểm tra	0	2	1	3
	6. Ôn tập cuối kỳ	0	3		3
	TOÁN 5B: HÌNH HỌC	13	16	1	30
	Chương I: KHỐI ĐA DIỆN	6	7	0	13
	1. Khái niệm về khối đa diện	2	2		4
2	2. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều	2	2		4
	3. Khái niệm về thể tích của khối đa diện	2	2		4
	4. Ôn tập chương I		1		1
	Chương II: Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu	7	9	1	17
	1. Khái niệm về mặt tròn xoay	2	1		3
	2. Mặt cầu	2	2		4
	3. Hệ tọa độ trong không gian	3	2		5
	4. Ôn tập chương và kiểm tra		2	1	3
	5. Ôn tập cuối kỳ		2		2
	TỔNG CỘNG	34	38	3	75

MỤC LỤC

Chương I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ.....	1
§1. ĐẠO HÀM CẤP HAI.....	2
1. Định nghĩa	2
2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai	2
§2.TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ	4
1. Tính đơn điệu của hàm số.....	4
2. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số	4
§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	6
1. Khái niệm cực đại, cực tiểu	6
2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị.....	6
3. Quy tắc tìm cực trị	6
§4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	9
1. Định nghĩa	9
2. Cách tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn	9
§5. TIỆM CẬN.....	11
1. Đường tiệm cận ngang.....	11
2. Đường tiệm cận đứng	11
§6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ	13
1. Sơ đồ khảo sát hàm số	13
2. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức	13
3. Sự tương giao của các đồ thị.....	19
ÔN TẬP CHƯƠNG I.....	21
Chương II. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT	22
§1. LŨY THỪA	22
1. Khái niệm lũy thừa.....	22
2. Phương trình $x^n = b$	23
3. Căn bậc n.....	23
4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ	24
5. Tính chất của lũy thừa với số mũ thực	24

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA.....	26
1. Khái niệm	26
2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa	26
3. Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$	26
§3. LÔGARIT	29
1. Khái niệm lôgarit	29
2. Quy tắc tính lôgarit	29
3. Đổi cơ số.....	30
4. Lôgarit thập phân – lôgarit tự nhiên.....	31
§4. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT	32
1. Hàm số mũ.....	32
2. Hàm số lôgarit	33
ÔN TẬP CHƯƠNG II	36
Chương I. KHỐI ĐA DIỆN	37
§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN.....	37
1. Khối lăng trụ và khối chóp	37
2. Khái niệm về hình đa diện, và khối đa diện.....	37
3. Hai đa diện bằng nhau	39
4. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện	41
§2. KHỐI ĐA DIỆN LÒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU	43
1. Khối đa diện lõi	43
2. Khối đa diện đều.....	43
§3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN	46
1. Thể tích của khối đa diện	46
2. Thể tích khối lăng trụ	47
3. Thể tích khối chóp	48
BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I.....	50
Chương II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU	52
§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY.....	52
1. Sự tạo thành mặt tròn xoay.....	52

2. Mặt nón tròn xoay	52
3. Mặt trụ tròn xoay	54
§2. MẶT CẦU	59
1. Mặt cầu và các khái niệm liên quan đến mặt cầu	59
2. Giao của mặt cầu và mặt phẳng	60
3. Giao của mặt cầu với đường thẳng. Tiếp tuyến của mặt cầu.....	60
4. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.....	61
§3. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	65
1. Tọa độ của điểm và của vectơ.....	65
2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ.....	66
3. Tích vô hướng.....	67
4. Phương trình mặt cầu	67
ÔN TẬP CHƯƠNG II	70